Cahiers de Recherche
Série « Décision, Rationalité, Interaction »

Cahier DRI-2014-03

Les probabilités en théorie des jeux

Mikaël Cozic et Bernard Walliser

INSTITUT D'HISTOIRE ET DE PHILOSOPHIE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

Cahiers de recherche de l'IHPST

Série « Décision, Rationalité, Interaction »

Sous la responsabilité scientifique de Mikaël Cozic et Philippe Mongin

Les probabilités en théorie des jeux[1]

Mikaël Cozic[2] & Bernard Walliser[3]

Résumé : La théorie des jeux est devenue la principale théorie générale en sciences sociales. L'une de ses caractéristiques saillantes est d'avoir massivement recours aux probabilités. Elles interviennent en permanence, et leur présence ne fait qu'augmenter au fur et à mesure que la théorie se complexifie. L'objet de cet article est d'examiner le statut épistémologique de ces probabilités. Il identifie les usages principaux des probabilités en théorie des jeux, dans ses trois branches que sont la théorie des jeux classique, la théorie des jeux épistémique et la théorie des jeux évolutionnaire. Chaque usage des probabilités sera rapporté à une taxonomie de leurs interprétations empruntée à la philosophie des probabilités.

Mots-Clés : théorie des jeux, probabilités, probabilités subjectives, probabilités objectives, incertitude stratégique, bayésianisme

---

Abstract: Game theory is currently the main general theory in the social sciences. One of its salient characteristics is that it relies massively on probability theory. And the more game theory becomes complex, the more it does so. The goal of this paper is to investigate the role and significance of probabilities in game theory. We identity three main uses of probability in game theory, in its three branches (i.e. classical, epistemic and evolutionary game theory). Each of these uses is related to a taxonomy of interpretation of probability coming from the philosophy of probability.

Keywords : game theory, probability, subjective probability, objective probability, strategic uncertainty, bayesianism

Classification JEL: B41, C70, C72, C73.

.

---

[1] Nous remercions Isabelle Drouet pour sa relecture minutieuse d'une version préliminaire de ce chapitre. Mikaël Cozic a bénéficié du soutien de l'Institut Universitaire de France, du Labex Institut d'Etude de la Cognition ANR-10-LABX-0087 IEC et de l'Idex ANR-10-IDEX-0001-02-PSL*.

[2] Université Paris-Est Créteil, Institut Universitaire de France & IHPST. E-mail : mikael.cozic@ens.fr

[3] Ecole d'Economie de Paris. Email address: walliser@enpc.fr.

1 Introduction

1.1. La théorie des jeux et les probabilités

Depuis la publication de *The Theory of Games and Economic Behavior*[1] de von Neumann et Morgenstern, généralement considéré comme son ouvrage fondateur, la théorie des jeux s'est imposée comme la seule théorie générale et formalisée des sciences sociales.

Elle est générale dans la mesure où elle ne se donne pas pour objet d'étude des situations particulières, mais développe un cadre d'analyse potentiellement valable pour toute situation d'interaction stratégique entre des acteurs. Il s'agit de situations génériques dans lesquelles les conséquences de l'action d'un acteur dépendent non seulement de sa propre action, mais aussi des actions mises en œuvre par les autres acteurs[2]. Ces situations incluent comme prototypes originels les jeux de société, mais elles recouvrent aussi bien des configurations de conflit militaire, de concurrence économique ou de compétition politique.

Elle est formalisée dans un cadre analytique qui a de fortes analogies avec celui que l'on trouve dans certaines branches des sciences de la nature. Ce cadre représente la dynamique du système d'interactions étudié. Par ailleurs, il mobilise (et a toujours mobilisé[3]) massivement le calcul des probabilités usuel. Compte tenu de l'importance qu'elle a prise au sein des sciences sociales, une question naturelle est celle de savoir quel statut est accordé à ces probabilités. En l'occurrence, il n'est pas ici question de traiter des probabilités classiquement introduites dans tout modèle pour l'ajuster aux données empiriques, supposées entachées d'erreurs de mesure. Il s'agit d'étudier les probabilités inscrites dans le cœur même de la théorie pour traduire les différentes incertitudes auxquelles les joueurs ont à faire face. En effet, l'hypothèse générale est que toutes les sources d'incertitude sont représentables par des probabilités plutôt que par d'autres outils formels (capacités de Choquet, intervalles de probabilités).

Les trois principales branches de la théorie des jeux seront successivement examinées. La '*théorie des jeux classique*' se place du point du vue du modélisateur qui définit *a priori* un

---

[1] John von Neumann & Oskar Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press, 1947 (1ère ed., 1944).

[2] On ajoute parfois comme condition que les joueurs *se représentent* cette interdépendance -voir par exemple John Harsanyi, «Games with Incomplete Information », *The American Economic Review*, vol. 85(3), 1995, pp. 292 .

[3] Voir les contributions fondatrices: John von Neumann, «Zur Theorie der Gesellschaftsspiele », *Mathematische Annalen*, 100, 1928, pp. 295-320 et John Nash, «Non-cooperative Games », *Annals of Mathematics*, 54, 1951, pp. 289-295.

concept d'équilibre en fonction des caractéristiques (opportunités, préférences, croyances) des joueurs. Plus précisément, il prévoit *ex ante* que les joueurs vont mettre en œuvre tel ou tel 'profil d'actions' (i.e., la donnée d'une action par joueur), compte tenu de leur rationalité supposée. Un état d'équilibre s'identifie formellement à un point fixe dans les boucles d'interaction entre les joueurs, chaque action de l'un étant une meilleure réponse à celles des autres. La théorie des jeux classique n'étudie pas la façon dont les joueurs arrivent à se situer en un état d'équilibre de façon constructive. Ce qu'on lui a régulièrement reproché.

C'est justement l'un des objectifs de la '*théorie des jeux épistémique*[4]' que de chercher à identifier des conditions dans lesquelles les joueurs, par leur raisonnement, pourraient en principe aboutir à un état d'équilibre. Dans ce cadre, on suppose que les joueurs ont une incertitude (probabilisée) sur l'action des autres joueurs et qu'ils agissent au mieux, compte tenu de cette incertitude. Les hypothèses qui conduisent aux concepts d'équilibre décrivent typiquement des joueurs dotés d'une rationalité très forte, et partageant une connaissance commune particulièrement riche quant à la structure et au déroulement du jeu.

La '*théorie des jeux évolutionniste*[5]' décrit le comportement séquentiel de joueurs en situation de rationalité limitée, face à la répétition d'un 'jeu de base'. Ils agissent indépendamment les uns des autres à chaque période, si bien qu'aucun bouclage instantané entre les actions des joueurs n'est à considérer. La théorie fait l'objet de deux interprétations principales, qui correspondent souvent (mais pas toujours) à des modèles différents. Dans la version 'agentielle', les joueurs sont considérés comme des acteurs qui effectuent des choix successifs qui définissent un processus d'apprentissage. Dans la version 'populationnelle', qui est celle retenue dans les applications de la théorie en biologie, les acteurs adoptent des stratégies fixées et seule la composition de la population se modifie du point de vue des stratégies qui cohabitent en son sein.

1.2. Les interprétations des probabilités

Le statut épistémologique des probabilités a été examiné tant par les philosophes que par les praticiens[6]. Dans ce qui suit, nous reprenons une distinction usuelle en philosophie des

[4] Pour une exposition approfondie, voir Andrés Perea, *Epistemic Game Theory. Reasoning and Choice*, Cambridge, Cambridge University Press, 2012.

[5] Voir Jörgen Weibull, *Evolutionary Game Theory*, Cambridge, MIT Press, 1995 et Drew Fudenberg & David Levine, *The Theory of Learning in Games*, Cambridge, MIT Press, 1998 pour des présentations approfondies. Pour une introduction, voir Jacques Lesourne, André Orléan & Bernard Walliser (eds.), *Evolutionary Microeconomics*, Springer, 2006, chap.3.

[6] Voir Alan Hajek, « Interpretations of Probability », *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2010 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = http://plato.stanford.edu/archives/spr2010/entries/probability-interpret/

probabilités, mais en la reformulant à l'aide d'une autre distinction, répandue dans le vocabulaire réflexif des sciences sociales : celle entre le modélisateur, qui étudie un système social donné et qui est supposé omniscient, et les acteurs qui appartiennent à ce système social et qui en ont une vision empreinte d'incertitude[7]. Toute probabilité est ainsi affectée à un 'attributeur' (le modélisateur ou les acteurs) et concerne telle ou telle propriété ou phénomène d'un système. Deux interprétations des probabilités sont ainsi distinguées. Une 'probabilité objective' (*chance* en anglais[8]) reflète le degré d'occurrence du phénomène tel qu'il est estimé par le modélisateur ; elle est considérée comme une véritable propriété attribuée au système considéré. Une 'probabilité subjective' (*credence* en anglais) reflète le degré de croyance d'un acteur en la survenue du phénomène, compte tenu de son incertitude; elle traduit un jugement de l'acteur, à l'instar du jugement qu'il peut porter sur toute propriété d'un système.

Les probabilités objectives sont estimées par le modélisateur en calculant la fréquence d'apparition du phénomène ou la proportion d'individus soumis au phénomène – ce calcul pouvant être basé sur l'observation ou sur l'exploitation de régularités (comme des symétries) relatives au phénomène en question. Elles sont classées en deux sous-catégories selon que le phénomène sous-jacent revête, dans l'état actuel des connaissances, une nature déterministe ou stochastique. Une 'probabilité ontologique' porte sur un phénomène supposé indéterministe. Il en est ainsi de la probabilité qu'un atome de carbone 14 se désintègre en un certain laps de temps. Une 'probabilité épistémique' considère que le phénomène peut être déterministe, mais que l'*influence* des facteurs qui le déterminent est trop mal connue (même si leur *identité* est connue) et que seule une vision probabiliste peut en rendre compte. Il en est ainsi de l'occurrence d'obtenir un six aux dés.

Les probabilités subjectives sont mesurées, toujours par le modélisateur, par interrogation directe des acteurs ou par révélation indirecte à partir des comportements qu'elles induisent. Dans ce dernier cas, la révélation suppose une théorie de la manière dont les degrés de croyances participent à la détermination du comportement de l'acteur. La théorie de l'espérance d'utilité est la théorie de référence en matière de révélation des degrés de croyances[9]. Les probabilités subjectives sont classées en deux sous-catégories selon qu'elles prennent une valeur identique ou différente selon les acteurs. Une probabilité est 'consensuelle' si tous les acteurs se forgent la même évaluation du phénomène en cause. Il en est ainsi, par exemple, du degré de culpabilité d'un accusé qui peut faire l'objet d'un large accord intersubjectif. Une probabilité est 'personnelle' si les acteurs portent des appréciations différentes sur l'occurrence d'un phénomène (Dans la littérature sur l'interprétation des

---

et Mikaël Cozic & Bernard Walliser, « Que mesurent les probabilités ? », *Prismes*, 23, Paris, Centre Cournot, 2012.

[7] Par « omniscience » du modélisateur, il faut entendre le fait qu'il connaît toutes les caractéristiques structurelles du système ainsi que tous les événements passés. Quand un système n'est pas déterministe, il ne connaît les événements futurs qu'en probabilité.

[8] Elle est parfois appelée « probabilité physique ».

[9] Remarquons que dans l'article précurseur de la théorie de la décision contemporaine (« Truth and Probability » [1926], *in* Richard Braithwaite (ed.) *Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, Londres, Routledge and Kegan Paul, 1931), F. Ramsey développe et axiomatise la théorie de l'espérance d'utilité afin de pouvoir mesurer les degrés de croyance.

probabilités, le qualificatif de 'personnel' est parfois assimilé à ce que nous appelons une probabilité 'subjective'. Nous en faisons un usage plus restrictif.)

L'un des cas paradigmatiques où l'on doit s'attendre à des probabilités subjectives consensuelles est celui où les acteurs sont informés des probabilités objectives. L'alignement des probabilités subjectives sur les probabilités objectives est exprimé par le 'principe principal' de Lewis (1980/1986)[10] et ses variantes. Ces principes d'alignement affirment en substance que la probabilité subjective assignée à l'événement *E*, étant donné que sa probabilité objective vaut α, vaut α également. Considérons le *sex ratio* d'une certaine population : dans ce cas, le modélisateur peut observer que la fréquence relative des hommes est stable et l'acteur fait confiance à cette constatation. Dans le cas du dé, le modélisateur peut invoquer des conditions de symétrie du dé que l'acteur reprend également à son compte.

1.3. Les probabilités en théorie de la décision individuelle

Dans la théorie de la décision individuelle, qui est à la base de la théorie des jeux, les probabilités interviennent essentiellement pour représenter un environnement mal connu qui a un impact sur les conséquences des actions entre lesquelles le décideur peut choisir. Deux agents sont abstraitement en présence, le décideur qui choisit entre des actions et la Nature qui prend des états selon une loi stable. Deux contextes de méconnaissance du décideur sur les états sont alors distingués : le risque et l'incertitude[11]. L'interprétation *minimale* de la distinction entre risque et incertitude est la suivante. Dans le cas de la 'décision risquée', les probabilités sur lesquelles reposent les préférences du décideur sont *données* au sens où elles sont connues *a priori* du modélisateur. Dans le cas de la 'décision en incertitude', seule la liste des états de la Nature est donnée au modélisateur. Cette interprétation minimale ne fait pas intervenir directement la distinction entre probabilités objective et subjective. Mais l'interprétation *traditionnelle*[12] de la distinction entre risque et incertitude est plus forte : selon celle-ci, dans une décision risquée, tout se passe comme si des probabilités objectives étaient connues du modélisateur, fournies au décideur et endossées par lui.. Par contraste, dans le cas de la 'décision en incertitude', le décideur est censé se forger des probabilités subjectives sur les états possibles de la Nature, sans que le processus de leur engendrement ne soit explicité par le modélisateur.

---

[10] David Lewis, « A Subjectivist's Guide to Objective Science » [1980], *Philosophical Papers*, vol.2, Oxford, Oxford University Press, 1986, 83-113.

[11] Par la suite, on utilisera les termes 'risque' et 'incertitude' en ce sens technique, et on parlera de 'méconnaissance' pour évoquer l'un ou l'autre.

[12] L'interprétation traditionnelle fait donc largement coïncider la distinction entre risque et incertitude et celle entre probabilités objective et subjective. Elle est explicitement défendue par Ken Binmore, *Rational Decisions*, Princeton, Princeton University Press, 2009, pp. 94-95.

Deux axiomatiques différentes sont associées à chacun de ces contextes. Dans le cas du choix risqué, l'axiomatique de von Neumann-Morgenstern montre que les préférences du décideur sont induites par l'espérance (dite 'objective') d'utilité, calculée avec les probabilités estimées par l'agent et connues *a priori* par le modélisateur. Empiriquement, une suite de choix du décideur permet alors de révéler, par abduction, la fonction d'utilité du décideur sur les conséquences certaines de ses actions. Dans le cas du choix en incertitude, l'axiomatique de Savage (1954/1972)[13] montre que les préférences du décideur sont induites par une espérance (dite 'subjective') d'utilité fondée sur l'assignation de probabilités subjectives aux états de la Nature. Empiriquement, une suite de choix du décideur permet de révéler, non seulement la fonction d'utilité du décideur, mais encore les probabilités subjectives qu'il accorde aux états.

Les probabilités n'interviennent pas uniquement dans la représentation des croyances d'un décideur sur son environnement. Elles peuvent également porter sur ses *actions*. Les 'modèles de choix stochastiques'[14] considèrent que le décideur ne choisit pas une action unique, mais tire au sort une action dans l'ensemble des actions possibles selon des probabilités prédéfinies. Généralement, la probabilité attachée à chaque action est une fonction monotone de l'utilité associée à cette action. Par exemple, dans le modèle de Luce (1959)[15], la probabilité d'une action est donnée par le rapport entre son utilité et la somme des utilités de toutes les actions possibles. Dans ce modèle, l'interprétation *directe* veut que la *règle de décision* est probabiliste et introduit d'emblée des probabilités de choix sur les actions possibles. Une interprétation *indirecte* suppose que les probabilités sur les actions dérivent d'une *fonction d'utilité* probabiliste, souvent spécifiée comme la somme d'une fonction d'utilité classique et d'un terme aléatoire. Ces probabilités peuvent elles-mêmes s'interpréter comme exprimant de la variabilité interindividuelle au sein d'une population (chaque décideur appartenant à la population maximisant la même fonction d'utilité déterministe en chaque situation de choix)[16] ou de la variabilité intraindividuelle (un décideur maximisant une fonction d'utilité qui varie d'un contexte de choix à l'autre conformément à la distribution supposée)[17]. Dans tous les cas, il s'agit d'une probabilité *objective* attribuée au comportement du décideur par le modélisateur, qui peut apparaître comme 'ontologique' ou 'épistémique' selon les cas.

Une remarque finale s'impose à propos des modèles à règle de choix probabiliste : une règle de décision probabiliste qui assigne un poids non nul à des actions non-optimales ne

---

[13] Leonard Savage, *The Foundations of Statistics,* New York, Wiley, 1972, (1ère ed. 1954).

[14] Egalement appelés 'modèles de choix discrets'. Pour un aperçu, voir Mikaël Cozic, *Fondements cognitifs du choix en rationalité*, Thèse, Paris, Université Paris-Sorbonne, 2005, sec. 4.2 ; pour une présentation approfondie, voir Simon Anderson, André de Palma & Jacques-François Thisse, *Discrete Choice Theory of Product Differentiation*, Cambridge, MIT Press, 1992. Les modèles à choix discrets trouvent leurs origines en psychophysique, en psychologie du choix et en économétrie.

[15] Duncan Luce, *Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis*, New York, Wiley, 1959.

[16] C'est l'interprétation privilégiée par les économètres.

[17] C'est l'interprétation privilégiée par les psychologues de la décision.

sera jamais optimale quand l'environnement est supposé probabilisable. C'est l'une des raisons pour lesquelles les modèles de choix stochastiques sont souvent interprétés comme des modèles de rationalité limitée. En revanche, elle peut devenir efficace lorsque le décideur connaît mal les probabilités associées aux états de la nature (qui peuvent différer d'une action à l'autre), mais se trouve dans une situation de décision répétée. Le décideur réalise alors un compromis entre deux comportements. Le 'comportement d'exploration' met en œuvre des actions encore peu testées pour apprécier leurs effets. Le 'comportement d'exploitation' met en œuvre les actions qui se sont avérées les plus performantes dans le passé. Il en est ainsi dans le 'problème du bandit à deux bras'[18] où le décideur ne connaît pas la probabilité de gain de chaque bras (mais possède une distribution de probabilités sur cette probabilité). Le décideur explore beaucoup dans les premières périodes, puis ne fait plus qu'exploiter dans les dernières périodes.

1.4 Plan du chapitre

Par la suite, au sein de la théorie des jeux classique, l'article examinera successivement les probabilités respectivement associées par les joueurs aux trois principales sources de méconnaissance qu'ils rencontrent. Il s'agit de probabilités sur les états de la Nature (section 2), sur les 'types' de joueurs (section 3) et sur les actions des joueurs (section 4). Par ailleurs, les deux derniers attributs (type, action) renvoient aussi bien à des caractéristiques du joueur lui-même qui se connaît mal qu'à celles de ses adversaires qu'il connaît encore plus mal. Enfin, les trois attributs peuvent être envisagés avant d'effectuer un choix (avec ses informations initiales) ou après ce choix (avec des informations acquises supplémentaires). La section 5 est consacrée aux probabilités dans la théorie des jeux épistémique et la section 6 à celles de la théorie des jeux évolutionniste. Quelques conclusions seront énoncées dans la section 7.

[18] Sur le compromis exploration-exploitation optimal, voir J.C. Gittins, *Multiarmed bandit allocation* indices, Wiley and Sons, 1989.

2 Probabilités sur les états de la nature

2.1 Jeu sous forme extensive

Dans un jeu 'sous forme extensive', deux types d'agents interviennent à nouveau, la Nature qui fournit des états et les joueurs qui choisissent des actions. Les agents jouent de façon séquentielle, dans un ordre quelconque, qui peut dépendre des coups déjà joués. Le jeu peut donc être représenté par un *arbre*, dont chaque nœud symbolise l'agent (nature, joueur) qui a le trait et les branches qui en sont issues les opportunités qui lui sont offertes[19] (voir Figure 1). Chaque trajectoire dans l'arbre (à partir du nœud initial) caractérise une histoire du jeu et s'achève par un nœud terminal, auquel sont affectées les utilités (agrégées) obtenues par chaque joueur. Par souci de simplicité, les joueurs, les états et les actions sont souvent supposés en nombre fini.

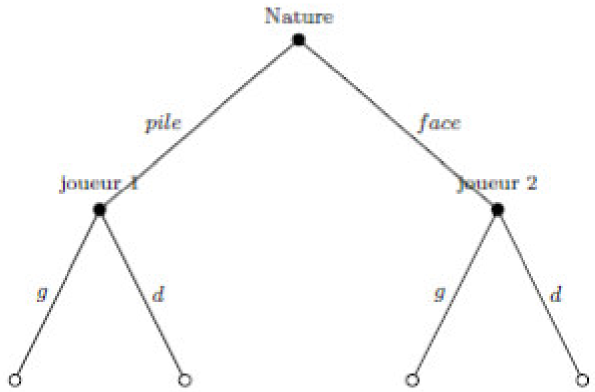

Figure Jeu sous forme extensive à deux joueurs.

On considère que la Nature prend un état dans un espace d'états à chaque fois qu'elle a la main. Les états successifs peuvent être sélectionnés dans des espaces indépendants les uns des autres. A contrario, ces espaces peuvent ne pas être indépendants et les états sélectionnés sont souvent corrélés. Ainsi, la Nature peut prendre un état global et fournir, quand elle a la main, un message partiel sur cet état. Il peut s'agir d'un sous-ensemble d'états dans lequel se situe l'état global. Il peut s'agir aussi d'un signal probabiliste qui est statistiquement corrélé (de façon connue du joueur) avec l'état. Dans un jeu de cartes, la distribution initiale des cartes aux joueurs et/ou au talon définit l'état global de la Nature. Au fur et à mesure du jeu, tout

[19] L'article fondateur est Harold Kuhn, «Extensive Games and the Problem of Information » *in* Harold Kuhn & Albert Tucker (eds.) *Contributions to the Theory of Games*, vol. 2, Princeton, Princeton University Press, 1953, pp. 193-216.

joueur reçoit des informations supplémentaires sur cette distribution : les cartes reçues au départ, cartes progressivement tirées du talon, cartes jouées par les autres.

Du point de vue d'un joueur particulier, on appelle 'stratégie' la donnée simultanée d'une action retenue par ce joueur en tous les nœuds de l'arbre où il est susceptible d'arriver et d'avoir le trait (même si les actions passées de ses adversaires peuvent l'empêcher d'y arriver). Ainsi, en vertu d'une stratégie donnée, tout joueur qui a le trait joue une certaine action en fonction des coups déjà joués dans le passé et des états de la Nature avérés. Une stratégie d'un joueur conduit, conditionnellement aux états manifestés par la Nature et aux stratégies suivies par les autres joueurs sur toute la trajectoire suivie, à une certaine utilité pour le joueur. Mais elle décrit également ce que ferait le joueur en des nœuds non atteints, ce qui lui donne un caractère contrefactuel. Bien entendu, diverses stratégies du joueur peuvent conduire au même résultat final. Dans un jeu de cartes, une stratégie définit ce que va jouer un joueur en fonction des cartes qu'il détient instantanément et de l'histoire passée du jeu.

En théorie des jeux classique, deux points de vue sont adoptés dans la résolution de l'arbre du jeu à l'aide d'une notion d'équilibre. Dans la perspective *ex post*[20], le joueur est censé jouer au fur et à mesure du jeu à chaque fois qu'il a le trait. Il tient compte de toute l'histoire du jeu pour ajuster ses croyances et optimiser son action courante. Dans la perspective *ex ante*, le joueur affiche avant le début du jeu ce qu'il va faire à chaque fois qu'il a le trait. Il définit *a priori* une stratégie conditionnellement à l'information susceptible d'être reçue, si bien que le jeu peut être joué par un tiers qui connaît toutes les stratégies. Les deux perspectives sont généralement supposées équivalentes car chaque joueur sait pertinemment, avant le jeu, toutes les informations qu'il est susceptible de recevoir et comment il va les intégrer. Il n'y a donc pas de raison pour qu'apparaisse une divergence entre ce qu'un joueur projette de faire (*ex ante*) s'il se trouvait en un nœud donné et ce qu'il ferait s'il y était vraiment.

2.2 Les probabilités et leur révision

En ce qui concerne l'intervention des probabilités sur l'état de la Nature, une première hypothèse affirme que l'espace des états possibles est connu de l'ensemble des joueurs. Si ce n'était pas le cas, la construction globale perdrait sa cohérence. Il serait par exemple problématique de supposer qu'un joueur, qui ne conçoit pas que la Nature puisse prendre tel

[20] Voir Boudewijn de Bruin, *Explaining Games. The Epistemic Programme in Game Theory*, Synthese Library, vol. 346, Springer, 2010, qui parle d'interprétations '*one shot*' et '*many-moments*'.

ou tel état avant de lui donner la main, mette en œuvre une stratégie qui spécifie quelle action il prendrait conditionnellement à la réalisation de cet état. Si l'hypothèse de connaissance de l'espace d'états n'est pas vérifiée, on se trouve dans une situation d''incertitude radicale' dans laquelle certains joueurs sont incapables d'énumérer les états possibles, du fait d'une difficulté à les imaginer ou à les conceptualiser. Cette situation est interprétée dans la littérature comme une situation d''unawareness'. Si l'on veut être précis, il faut renforcer cette première hypothèse en exigeant que l'espace d'états soit de *connaissance commune* entre les joueurs : tout le monde le connaît, sait que tout le monde le connaît, sait que tout le monde sait que tout le monde le connaît, etc. L'impératif de connaissance commune de l'espace d'états n'est qu'une composante de l'impératif, en théorie des jeux classique, de la connaissance commune de la structure du jeu entre les joueurs [21], la structure du jeu comprenant tous les éléments fixes du jeu i.e. les préférences des agents ainsi que les règles de révision des croyances. Informellement, un joueur qui connaît l'espace des états de la Nature possibles est susceptible de se comporter très différemment selon qu'il pense qu'un autre joueur connaît ou non cet espace, selon qu'il pense que cet autre joueur pense que lui-même connaît ou non cet espace, etc.

Une seconde hypothèse concernant les probabilités affectées aux états affirme qu'il existe une distribution *a priori* sur les états qui est fournie à tous les joueurs. L'interprétation *minimale* de cette distribution en fait une probabilité subjective consensuelle. Ici encore, si l'on voulait être plus précis, il faudrait ajouter que l'hypothèse est couramment renforcée en celle selon laquelle il est de connaissance commune parmi les joueurs qu'ils partagent une telle distribution *a priori*. . Si l'on a des raisons de penser qu'il n'y a pas connaissance commune de cette distribution, alors on peut s'appuyer sur les hiérarchies de probabilités des espaces de types (voir§ 4.1) pour représenter le profil épistémique des joueurs. Mais les inférences que chaque joueur fait sur les raisonnements des autres deviennent alors fort complexes. L'interprétation *traditionnelle* de cette probabilité *a priori*, reflétée dans les exemples qu'on donne couramment pour l'illustrer, est qu'il s'agit d'une probabilité objective. Elle est naturelle dans les jeux de société où un 'dispositif aléatoire' (*random device*) existe physiquement (lancer d'un dé, mélange de cartes) [22] et engendre cette distribution. Elle est moins évidente dans des jeux sociaux où la Nature résume des éléments aléatoires disparates. Dans cette seconde interprétation, il y a bien sûr toujours une probabilité

---

[21] Insistons sur le fait que, dans la théorie des jeux classique, cette hypothèse est *informelle* et relève peut-être plus de la *condition d'application* de la théorie que de la théorie elle-même. Voici comment elle est présentée dans l'une des expositions de référence de la théorie, Drew Fudenberg & Jean Tirole, *Game Theory*, Cambridge, MIT Press, 1991, p.4 : « Usually we also assume that all players know the structure of the strategic form, and know that their opponents know it, and know that their opponents know that they know, and so *ad infinitum*. That is, the structure of the game is *common knowledge*…». Voir aussi Roger Myerson, *Game Theory. Analysis of Conflict*, Harvard, Harvard University Press, 1997, pp. 64-65.En revanche, la théorie des jeux *épistémique* représente *explicitement* les hypothèses sur la connaissance commune.

[22] Voir Ken Binmore, *Playing for Real*, Oxford, Oxford University Press, 2007 (1ère ed. 1992), p. 98 pour l'analyse d'une forme simplifiée de Parcheesi, l'un des exemples classiques de jeu où intervient un dispositif aléatoire.

(subjective) consensuelle : les acteurs endossent la probabilité objective affichée par le modélisateur, conformément au 'principe principal' (voir §. 1.2).

Par ailleurs, chaque joueur reçoit au cours du jeu des messages sur l'état de la Nature effectivement réalisé. Ces messages peuvent différer d'un joueur à l'autre. Au vu de la probabilité *a priori* commune, chaque joueur va alors réviser sa distribution de probabilités en fonction du signal personnel qu'il reçoit. Du point de vue de l'interprétation traditionnelle, la distribution initiale objective laisse place à une distribution finale subjective (sur l'état de la Nature réalisé). En revanche, les probabilités conditionnelles liant un signal reçu à l'état sélectionné sont des probabilités objectives en ce qu'elles sont censées traduire des corrélations physiques. Cependant, la règle de Bayes s'impose comme règle de révision des croyances[23]. Il en résulte que la probabilité (elle-même subjective) peut différer d'un joueur à un autre.

Quant à la notion d'équilibre retenue, deux options principales sont en présence. La première est d'appliquer l'équilibre de Nash aux stratégies. A l'équilibre, toute stratégie (conditionnelle aux états de la Nature) d'un joueur est une meilleure réponse aux stratégies des autres. L'autre option consiste à raisonner par un processus de rétroduction (*backward induction*) : on évalue l'utilité (de chaque joueur) en un nœud à partir de l'utilité aux nœuds postérieurs et en remontant progressivement l'arbre du jeu des nœuds terminaux au nœud initial. S'il s'agit du nœud d'un joueur, on retient la valeur maximale de l'utilité pour ce joueur (et l'action associée). S'il s'agit d'un nœud de la Nature, on prend l'espérance d'utilité sur tous les états possibles. On obtient ainsi un équilibre 'parfait', notion plus forte que celle d'équilibre de Nash.

2.3 L'hypothèse de l'*a priori* commun

L'hypothèse de probabilité *a priori* commune (*common prior*, parfois appelée la 'doctrine d'Harsanyi' à la suite d'Aumann) joue un rôle très important en théorie des jeux et dans ses applications, notamment en économie théorique. Néanmoins, elle paraît souvent contre-intuitive au regard de la diversité des opinions[24]. L'une des réponses que l'on peut donner est

[23] Voir Bernard Walliser & Denis Zwirn « Can Bayes' Rule be Justified by Cognitive Rationality Principles », *Theory and Decision*, 53(2), 2002, pp. 95-135..

[24] Pour des éléments de discussion de l'hypothèse de la probabilité *a priori* commune, voir Robert Aumann, « Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality », *Econometrica*, 55(1), 1987, sec.5, Stephen

la suivante : les probabilités subjectives qui nous sont révélées (directement ou non) par les décideurs sont des probabilités *a posteriori*. Le fait qu'elles ne soient pas consensuelles ne montre pas qu'elles ne dérivent pas, par un processus de révision, d'une probabilité *a priori* commune. Il suffit en effet que les joueurs aient obtenu des informations différentes pour que les probabilités *a posteriori* diffèrent.

Mais on montre que deux joueurs qui échangent leurs estimations de la probabilité d'un événement ne peuvent pas 's'accorder pour ne pas s'accorder' (*agree to disagree*) : s'ils ont une probabilité *a priori* commune, la connaissance commune de leurs probabilités *a posteriori* implique que ces probabilités sont identiques (Aumann, 1976)[25]. Ce résultat se laisse mieux cerner dans sa version dynamique[26]. Supposons que les joueurs aient des estimations *a priori* différentes sur un événement et se transmettent, de façon séquentielle, ces estimations progressivement révisées. Ces estimations finissent alors par converger vers une valeur commune sous des conditions techniques assez exigeantes. Tout se passe, en effet, comme si la séquence de communication et de révision mettait implicitement en commun les informations entre les joueurs. Le résultat d'Aumann (1976) énonce une condition nécessaire à l'hypothèse de l'*a priori* commun. On peut la renforcer pour obtenir une *caractérisation* de l'hypothèse[27] : en substance et sous certaines conditions[28], celle-ci est satisfaite si, et seulement si, il n'y a pas connaissance commune de désaccord sur les espérances induites par les probabilités (subjectives) en jeu.

3 Probabilités sur les types des joueurs

3.1 Formes de méconnaissance

Dans les situations précédentes, un joueur pouvait être incertain de l'état de la nature, mais connaissait parfaitement les caractéristiques de tous les joueurs. A présent, on considère que ces caractéristiques elles-mêmes sont mal connues et on parle de 'jeux à information incomplète'. Pour un joueur donné, la méconnaissance porte essentiellement sur les caractéristiques des *autres* joueurs, dans la mesure où il est en position d'observateur par rapport à eux. Ces caractéristiques sont en effet révélées d'après l'observation des actions

Morris, « The Common Prior Assumption in Economic Theory », *Economics and Philosophy*, 11, 1995, pp. 227-253 et Faruk Gul, «A Comment on Aumann's Bayesian View », *Econometrica*, 6(4), 1998, pp. 923-927.

[25] Robert Aumann, « Agreeing to Disagree », *The Annals of Statistics*, vol. 4 (6), 1976, pp. 1236-1239.

[26] Voir John Geanakoplos & Heraklis Polemarchakis «We Can't Disagree Forever », *Journal of Economic Theory*, vol. 28 (1), 1982, pp. 192-200.

[27] Voir notamment Giacomo Bonanno & Klaus Nehring, «How to Make Sense of the Common Prior Assumption under Incomplete Information », *International Journal of Game Theory*, 28(3), 1999, pp. 409-434 ; Yossi Feinberg, « Characterizing Common Priors in the Form of Posteriors », *Journal of Economic Theory*, 91, 2000, pp. 127-179; et Joseph Halpern, « Characterizing the Common Prior Assumption », *Journal of Economic Theory*, 106, 2002, pp. 316-355.

[28] Par exemple la finitude ou la compacité de l'espace d'états.

d'autrui et sont donc entachées de méconnaissance. Mais la méconnaissance peut aussi porter sur ses propres caractéristiques qui lui sont mal connues malgré ses capacités introspectives. Le joueur peut avoir des 'états d'esprit' alternatifs selon l'environnement dans lequel il se trouve.

Plus concrètement, la méconnaissance sur un autre joueur peut d'abord porter sur ses *préférences*. C'est ainsi qu'une firme en situation d'oligopole peut ignorer le coût de production de ses concurrentes. Elle peut porter sur les *opportunités* d'action de l'autre joueur, souvent par oubli de certaines actions possibles. C'est ainsi qu'une armée peut ignorer que son adversaire dispose d'une arme nouvelle (ou même classique). Elle porte enfin sur les *croyances* de l'autre, qui elles-mêmes concernent la nature, les autres joueurs ou lui-même. C'est ainsi qu'un parti politique peut ignorer si le parti adverse connaît son électorat, ses motivations ou celles des autres partis. Symétriquement, un joueur peut avoir une méconnaissance sur ses propres préférences, sur ses propres opportunités d'action et sur ses propres croyances.

3.2 Construction des types

La théorie des jeux introduit le concept de 'type' pour désigner les caractéristiques d'un joueur qui peuvent faire l'objet de méconnaissance. Le type d'un joueur détermine ses préférences, ses opportunités et ses croyances, à tous les niveaux successifs ('je crois que tu crois que je crois ….'). Dans le formalisme canonique de la théorie des jeux à information incomplète (Harsanyi 1967/1968)[29], on réduit le type d'un joueur à une variable unique et on fait l'hypothèse supplémentaire que le profil des types des joueurs (i.e. la donnée d'un type pour chaque joueur) peut se traiter comme un état global de la nature. En effet, les caractéristiques des joueurs sont supposées immuables dans le temps et peuvent revêtir une gamme de positions. Dès lors, pour chaque joueur, une distribution *a priori* sur cet espace de profils de types va permettre de représenter la hiérarchie infinie de ses croyances (ses croyances d'ordre 1 sur les opportunités et les préférences, et ses croyances d'ordre supérieur sur les croyances des autres joueurs) en conditionnalisant sur son propre type.

---

[29] John Harsanyi, « Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players. Part I. The Basic Model », *Management Science*, 14(3), 1967, pp. 159-182; John Harsanyi, « Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players. Part II. Bayesian Equilibrium Points », *Management Science*, 14(5), 1967, pp. 320-334 ; John Harsanyi, « Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players. Part III. The Basic Probability Distribution of the Game », *Management Science*, 14(7), 1968, pp. 488-506.

Dans ce formalisme, la hiérarchie infinie des croyances de chaque joueur n'est pas *donnée* d'emblée, mais s'avère explicitement *construite*. Néanmoins, si l'on part de hiérarchies de croyances cohérentes, alors on peut montrer qu'elles se laissent représenter dans le formalisme canonique. Autrement dit, on peut *définir* des types (plutôt que les prendre comme primitifs) et associer à chaque joueur une distribution de probabilités sur l'ensemble des états de la nature et des types des autres joueurs (Mertens & Zamir, 1985)[30]. On peut aussi remarquer que la façon dont la théorie des jeux classique aborde la notion de type est restrictive à certains égards : elle autorise les joueurs à varier dans certaines de leurs caractéristiques, mais ne les autorise pas réellement à raisonner de manière différente.

Sous les hypothèses conventionnelles, tout se passe alors comme si la Nature définissait, au début du jeu, une certaine distribution *a priori* de types dans l'ensemble des distributions possibles. De plus, dans le cas usuel, la Nature est censée informer chaque joueur de son propre type, lequel va réviser sa croyance sur les types des autres joueurs par conditionalisation bayésienne. C'est sur la base de cette information qu'il se forme sa distribution de probabilité *a posteriori*. Autrement dit, on fait de nouveau l'hypothèse de l'*a priori* commun. Mais son origine est plus incertaine encore : il ne s'agit pas ici de supposer que des agents s'accordent sur un 'dispositif aléatoire', mais qu'ils s'accordent sur les probabilités des paramètres non-doxastiques (opportunités, préférences) et des hiérarchies de croyances des uns et des autres.

3.3 Jeu bayésien

Une situation d'interaction stratégique à information incomplète est traduite formellement par un *jeu bayésien*. Un jeu bayésien est défini par la donnée, pour chaque joueur, de son espace de stratégies possibles et de son espace de types possibles. On explicite aussi la fonction d'utilité de chaque joueur, qui dépend de l'ensemble des stratégies utilisées par les joueurs ainsi que de l'ensemble des types réalisés des joueurs. Le jeu est enfin complété par la probabilité *a priori* commune accordée à la distribution des types, progressivement révisée en fonction des informations supplémentaires[31]. Chaque joueur est censé maximiser son espérance d'utilité compte tenu des probabilités précédentes. L'équilibre bayésien est alors un ensemble de stratégies individuelles (conditionnelles aux types des joueurs) tel que chacune des stratégies soit une meilleure réponse à celles des autres.

[30] Jean-François Mertens & Shmuel Zamir, « Formulation of Bayesian Analysis for Games with Incomplete Information », *International Journal of Game Theory*, 14(1), 1995, pp. 1-29. Voir aussi Michael Maschler, Eilon Solan & Shmuel Zamir, *Game Theory*, Cambridge, Cambridge University Press, 2013, chap. 11.

[31] Selon les cas, les expositions de référence de la théorie des jeux incluent ou non l'hypothèse de l'*a priori* commun dans la définition d'un jeu bayésien.

Un exemple classique concerne l'attitude 'dure' (agressive) ou 'molle' (pacifique) que manifeste une entreprise dans un jeu. Chaque attitude constitue un type alternatif de l'entreprise et correspond en fait à des préférences différentes sur les profils de stratégies. L'entreprise connaît son type propre (qui est immuable durant la partie), mais les autres entreprises se contentent de définir une distribution de probabilités sur les types possibles de l'entreprise considérée. Dans un jeu séquentiel à horizon fini, une entreprise molle peut alors avoir intérêt, du moins au début, à adopter une attitude dure vis-à-vis des autres pour mieux arriver à ses fins. Mais dans les dernières périodes, elle a intérêt à revenir à sa 'véritable' attitude, et va adopter des actions qui révèlent qu'en fait, elle est molle.

Dans certains de ses modèles, la théorie des jeux introduit des hiérarchies de croyances pour rendre compte de comportements en rationalité limitée. Dans le modèle de 'hiérarchie cognitive'[32], les joueurs ont (et attribuent aux autres joueurs) des capacités de raisonnement stratégique variables et ordonnées en niveaux. Les joueurs de niveau 0 choisissent une action au hasard. Les joueurs de niveau k choisissent en adoptant une distribution de probabilités sur le profil des types des joueurs moins sophistiqués (répartis entre le niveau 0 et le niveau $k – 1$) tout en ignorant les joueurs plus sophistiqués. La répartition des joueurs selon les niveaux est supposée bien connue du modélisateur et connue de façon tronquée par les joueurs.

4 Probabilités sur les actions des joueurs

4.1 Méconnaissance des actions passées

Dans ce qui précède, pour un jeu dynamique, tout joueur est supposé parfaitement informé de toutes les actions passées. Désormais, on considère que certains joueurs ne sont pas à même d'enregistrer tout le déroulement du jeu. On se trouve dans un 'jeu à information imparfaite'. Pour un joueur donné, cette méconnaissance peut porter à la fois sur les actions passées des autres joueurs (qu'il observe mal) et sur ses propres actions (dont il ne garde pas la mémoire). On peut d'ailleurs considérer que les états de la nature inconnus ressortent de la même analyse. En effet, on peut toujours considérer que la nature définit un état global dès le début du jeu, mais que les joueurs ne peuvent l'observer.

[32] Colin Camerer, Teck-Hua Ho & Juin-Kuan Chong, « A Cognitive Hierarchy Model of Games », *The Quaterly Journal of Economics*, 2004, pp. 861-898.

Cette situation est représentée sur l'arbre du jeu (voir Figure 2) par des 'ensembles d'information' (Kuhn, 1953). Par définition, si un joueur 2 joue après le joueur 1, il rassemble en un même ensemble les actions potentiellement jouées par le joueur 1 qu'il ne peut discerner. Bien entendu, dire qu'un joueur ne peut discerner entre différentes actions passées d'un adversaire revient à dire qu'il ne peut discerner entre différentes histoires du jeu. La notion de stratégie doit être adaptée à cette modification. Une stratégie d'un joueur est la donnée de l'action mise en œuvre par ce joueur en tout ensemble d'information où il a la main. On peut également remarquer que, si on considère un jeu statique (ou un jeu répété), on peut le transformer en un jeu dynamique à l'aide d'ensembles d'information. En effet, dans un jeu statique, chaque joueur agit sans savoir ce que font les autres (à la même période).

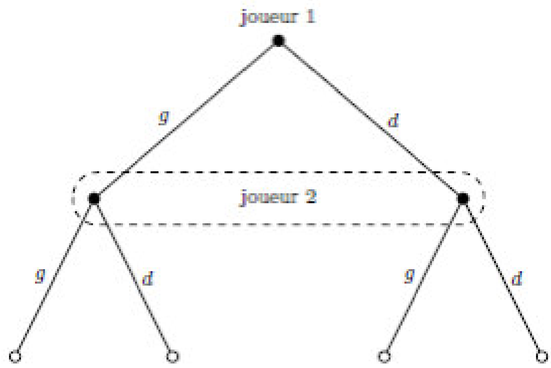

Figure 2. Le joueur 2 ignore l'action choisie par le joueur 1.

4.2 Probabilités sur les actions passées

Pour aller plus loin dans la résolution du jeu, le joueur est amené à définir une distribution de probabilités sur les actions d'autrui non discriminées. Cette distribution de probabilités traduit la croyance (quantitative) du joueur au fait que son adversaire a joué telle action plutôt que telle autre. Ces probabilités ne font pas partie des données de la situation stratégique, et ont donc un statut subjectif. De plus, elles sont personnelles car deux joueurs différents n'ont pas forcément les mêmes estimations de la probabilité d'une action passée d'un troisième. Néanmoins, sans autre justification, l'hypothèse faite ultérieurement est que ces croyances sont révisées de façon bayésienne.

En effet, ces probabilités sont définies de façon endogène par le concept usuel de solution d'un jeu en information imparfaite, l''équilibre séquentiel' (Kreps & Wilson, 1982)[33]. Un

[33] David Kreps & Robert Wilson, « Sequential Equilibria », *Econometrica*, 50(4), 1982, pp. 863-894. Bien entendu, l'équilibre de Nash s'applique toujours aux jeux à information imparfaite. On peut voir l'équilibre séquentiel comme une extension à ces jeux de l'équilibre parfait, brièvement décrit au §. 1.2.

équilibre séquentiel consiste en la définition simultanée d'une *stratégie* pour chaque joueur et d'*une distribution de probabilités* en tout ensemble d'information. Compte tenu des croyances des joueurs, en tout ensemble d'information, chaque stratégie d'un joueur est une meilleure réponse aux croyances des autres. Compte tenu des stratégies des joueurs, en chaque ensemble d'information, chaque croyance est obtenue par révision bayésienne à partir de celles-ci. D'une certaine façon, les probabilités sont donc à nouveau 'révélées' à partir des stratégies suivies à l'équilibre.

Une illustration avec méconnaissance de sa propre action passée est celle du 'conducteur ivre' (*absent-minded driver*)[34]. Un conducteur ivre est sur la route qui le ramène à son domicile. De façon optimale, il doit quitter l'autoroute à la seconde sortie pour rentrer chez lui directement. La pire option est de sortir à la première sortie et l'option intermédiaire de rater les deux sorties. Lorsqu'il arrive à une sortie, il ne sait plus s'il est à la première ou la seconde. En raisonnant *ex ante*, il sait avant de s'enivrer qu'il va être soumis au dilemme de sortir ou non et s'efforce de le résoudre. Il est alors amené à définir, lorsqu'il arrive à une sortie, la probabilité d'être à la première ou à la seconde.

4.3 Méconnaissance des actions futures

Un élargissement du cadre d'analyse habituel consiste à ne plus seulement considérer des actions (stratégies) pures, mais aussi des actions (stratégies) mixtes. Par définition, une action mixte est une distribution de probabilités sur les actions pures. Une stratégie mixte peut être soit la donnée d'actions mixtes au lieu de pures, soit une distribution de probabilités sur un ensemble de stratégies. Une action (stratégie) pure est un cas particulier d'une action (stratégie) mixte quand les probabilités sont dégénérées. Toutes les notions usuelles d'équilibre peuvent être étendues à des actions (stratégies) mixtes, en faisant apparaître des états d'équilibre originaux. Les stratégies mixtes reçoivent en pratique deux interprétations principales.

Dans l'interprétation *classique*, on suppose que chaque joueur tire au sort une action (stratégie) donnée, à l'aide d'un dispositif aléatoire qui réalise une distribution de probabilités donnée. Les probabilités sont donc objectives, dans la mesure où elles sont reliées à un

[34] Voir Michele Piccione & Ariel Rubinstein, « On the Interpretation of Decision Problems with Imperfect Recall », *Games and Economic Behavior*, 20, 1997, pp. 3-24 et Robert Aumann, Sergiu Hart & Motty Perry, «The Absent-Minded Driver », *Games and Economic Behavior*, 20, 1997, pp. 102-116.

dispositif matériel (C'est l'interprétation proposée par von Neumann & Morgenstern (1944/1947), §17.1.). Cependant, ces probabilités ne sont généralement connues que du seul joueur qui les met en oeuvre. Ces probabilités sont mêmes 'volontaires' dans la mesure où elles sont imposées par le joueur. L'idée sous-jacente est que le joueur se rend plus imprévisible en adoptant un comportement stochastique. De plus, il dispose de plus d'actions (stratégies) possibles. Une telle procédure permet ainsi de faire apparaître un équilibre de Nash en stratégies mixtes dans tout jeu statique fini, alors qu'il n'en existe pas forcément en stratégies pures.

Dans l'interprétation *doxastique*[35], on suppose que chaque joueur adopte une croyance probabiliste sur l'action (stratégie) que ses adversaires sont susceptibles de mettre en œuvre. Les probabilités sont fondamentalement subjectives dans la mesure où elles s'interprètent comme des degrés de croyance. De plus, ces probabilités sont personnelles dans la mesure où deux joueurs peuvent avoir des estimations différentes de la probabilité d'une action d'un même troisième. Cette interprétation a surtout été développée dans la théorie des jeux épistémique où les joueurs sont censés se positionner en un équilibre par leurs seuls raisonnements (voir §4.2).

Les stratégies mixtes interviennent également lorsque les joueurs sont dotés d'une rationalité limitée. Dans le 'modèle de réponse quantale'[36], on suppose que, compte tenu de la stratégie choisie par l'adversaire, chaque joueur met en œuvre une stratégie mixte conformément à l'un ou l'autre des modèles individuels de choix stochastique (voir §1.2). De ces modèles, on conserve notamment l'idée selon laquelle une stratégie (pure) a d'autant plus de chance d'être jouée que son (espérance d') utilité est élevée. La notion d'équilibre retenue n'est alors autre que celle d'un équilibre des fonctions de réponse quantale. Il s'agit là d'un affaiblissement de la notion d'équilibre de Nash[37].

4.4 Justifications des stratégies mixtes

Les stratégies mixtes soulèvent certaines difficultés empiriques et conceptuelles. D'une part, elles sont difficilement observables par les autres joueurs. D'autre part, elles s'avèrent peu stables. En effet, on peut montrer que si une stratégie mixte est une meilleure réponse aux

[35] Cette interpretation est parfois appelée 'bayésienne', par exemple par Philip Reny & Arthur Robson, « Reinterpreting Mixed Strategy Equilibria : A Unification of the Classical and Bayesian Views », *Games and Economic Behavior*, 48(2), pp. 355-384.

[36] Richard McKelvey & Thomas Palfrey, « Quantal Response Equilibria for Normal Form Games », *Games and Economic Behavior*, 10(1), 1995, pp. 6-38.

[37] Voir Simon Anderson, Jacob Goeree & Charles Holt, « Logit Equilibrium Models of Anomalous Behavior: What to do when the Nash Equilibrium Says one Thing and the Data Say Something Else » *in* Charles Plott & Vernon Smith (eds.), *Handbook of Expermental Results*, chap. 61, Elsevier, 2002.

stratégies choisies par les adversaires, alors toute stratégie pure à laquelle la stratégie mixte accorde une probabilité non nulle est également une meilleure réponse aux stratégies des adversaires (l'équilibre est non strict). Dés lors, on peut chercher à les justifier[38] à partir de concepts mieux ancrés.

Une première justification consiste à faire dériver les stratégies mixtes de stratégies pures d'un jeu à information incomplète. Plus précisément, on considère un jeu statique dans lequel chaque joueur a a une méconnaissance limitée (autour d'une valeur de référence) sur les utilités des autres, qui jouent le rôle de types. En un équilibre bayésien, la stratégie d'un joueur dépend du type des joueurs, et est donc elle-même aléatoire. Le 'théorème de purification' d'Harsanyi (1973)[39] affirme que si les incertitudes sur les préférences tendent vers zéro, la stratégie d'équilibre bayésien tend vers la stratégie mixte d'équilibre du jeu non perturbé. Si on part de probabilités objectives sur les types, les probabilités associées aux stratégies mixtes le seront aussi. Mais on peut aussi supposer que les incertitudes initiales sont subjectives, et donnent lieu à des probabilités subjectives sur les stratégies mixtes.

Une seconde justification, plus qualitative, consiste à supposer qu'une stratégie mixte traduit le comportement d'une population dont les membres poursuivent des stratégies pures différentes. Plus précisément, dans un jeu bien défini, chaque joueur est en fait le représentant d'une sous-population formée d'agents identiques à lui. Tout membre d'une sous-population affronte les autres joueurs et adopte une stratégie pure d'équilibre. La combinaison des stratégies d'équilibre de la sous-population d'un joueur définit alors une stratégie mixte. Il reste à montrer que cette stratégie mixte est bien une stratégie d'équilibre du jeu initial.

5 Probabilités en théorie des jeux épistémique

5.1 Principes

La théorie des jeux classique représente les croyances mutuelles des joueurs sur leurs caractéristiques respectives par le biais du concept de *type* (voir §3.1) : dans les jeux à

[38] Une réponse possible consiste à rappeler l'idée évoquée précédemment, selon laquelle une stratégie mixte permet de se rendre imprévisible. Mais dans certains jeux comme la Bataille des Sexes, il peut être intéressant pour un joueur que son adversaire connaisse son action future.

[39] John Harsanyi, «Games with Randomly Disturbed Payoffs: A New Rationale for Mixed-strategy Equilibrium Points », *International Journal of Game Theory*, 2(1), 1973, pp. 1-23.

information incomplète, la méconnaissance qu'a un joueur des caractéristiques des autres joueurs est représentée par une probabilité subjective sur leurs types possibles. La théorie des jeux épistémique reprend le formalisme des types, mais l'enrichit puisqu'elle se représente les joueurs comme entretenant de plus des croyances explicites à propos des *stratégies* qui vont être sélectionnées par les autres joueurs. La perspective adoptée se rapproche donc de la théorie de la décision individuelle. Puisqu'un joueur entretient des croyances sur les caractéristiques des autres joueurs et sur les stratégies qu'ils retiennent, il entretient également des croyances sur leur *rationalité*.

Une illustration est donnée par le jeu dans lequel il s'agit de deviner un nombre entre 0 et 99, sachant que le vainqueur est celui qui s'approche au plus près de 2/3 de la moyenne des réponses. La réponse maximale étant 99, ceux qui raisonnent au premier degré savent que la bonne réponse ne peut excéder 66, ceux qui raisonnent au second degré que la bonne réponse ne peut excéder 44 et ainsi de suite. Le raisonnement croisé supposant une connaissance commune de la rationalité des joueurs conduit à la limite tous les joueurs à répondre 0, en l'occurrence un équilibre de Nash du jeu.

5.2 Equilibres associés

La théorie des jeux épistémique cherche à savoir comment les croyances des joueurs sur les caractéristiques du jeu et des autres joueurs vont contraindre leurs croyances sur les stratégies sélectionnées par les autres et, par conséquent, leurs propres choix de stratégies. Différents jeux d'hypothèses sur les croyances des joueurs permettent de justifier différents concepts d'équilibre qui apparaissent alors comme des 'équilibres de croyances'. Deux hypothèses sont postulées de façon générale. Une première hypothèse affirme qu'il est de connaissance commune que les joueurs sont rationnels. Une seconde hypothèse affirme que la structure du jeu est de connaissance commune.

Les concepts d'équilibre qui sont des affaiblissements de l'équilibre de Nash, sont différenciés par des hypothèses alternatives supplémentaires. Une hypothèse supplémentaire porte sur la connaissance commune de l'indépendance des joueurs. Elle justifie la notion d'équilibre rationalisable[40]. Un équilibre est rationalisable si chaque action d'un joueur est une meilleure réponse à une meilleure réponse ….à une meilleure réponse des autres. Une hypothèse supplémentaire alternative porte sur la connaissance commune que les croyances *a*

[40] Chin-Chiu Tan & Sergio Ribeiro Da Costa Werlang «The Bayesian Foundations of Solution Concepts of Games », Journal of Economic Theory, 45, 1988, pp.370-391.

priori des joueurs sont identiques. Elle justifie la notion d'équilibre corrélé[41]. En un équilibre corrélé, un 'corrélateur' indique à chaque joueur, après tirage dans une distribution de probabilités sur les combinaisons d'actions des joueurs, quelle action mettre en œuvre et le joueur a intérêt à le faire si les autres le font. (On étend ici la notion de distribution de probabilités sur les actions d'un joueur à celle de distribution globale sur les combinaisons d'action des joueurs.) En revanche, la justification épistémique de l'équilibre de Nash nécessite des hypothèses bien plus drastiques et peu réalistes.

6 Probabilités en théorie des jeux évolutionniste

6.1 Processus d'apprentissage

Un processus d'apprentissage est fondé sur un jeu dont les caractéristiques se répètent à l'identique de période en période avec les mêmes joueurs. Ce 'jeu de base' est le plus souvent statique, mais peut éventuellement être lui-même dynamique. Le jeu est joué séquentiellement par des joueurs ayant à la fois une information limitée et une rationalité limitée. C'est dire qu'ils ne procèdent pas à des raisonnements stratégiques complexes, mais sont néanmoins capables de tenir compte de leur expérience passée. Enfin, les joueurs sont situés géographiquement sur les nœuds d'un graphe tracé lui-même sur un support matériel (ligne, plan, sphère, tore) et n'interagissent qu'avec leurs voisins.

A chaque période, le joueur active un processus de délibération explicite qui peut être décomposé en quatre étapes. (1) Dans l'*étape d'interaction*, les joueurs se rencontrent deux à deux ou simultanément, chacun ne rencontrant que ses voisins dans un voisinage d'interaction. (2) Dans l'*étape d'information*, chaque joueur reçoit des informations sur les actions passées et les utilités obtenues, informations recueillies dans un voisinage d'information et avec une mémoire limitée. (3) Dans l'*étape de calcul*, chaque joueur calcule des indicateurs relatifs à ses actions passées (performance moyenne) ou à celles d'autrui (fréquence), sur lesquelles il base ses prévisions relatives aux actions futures d'autrui. (4) Dans l'*étape de décision*, chaque joueur applique une règle de choix pour déterminer l'action qu'il met en oeuvre dans l'ensemble de ses actions possibles.

Des probabilités peuvent être introduites à chacune des étapes du processus de délibération. (1) Dans l'étape d'interaction, les joueurs se rencontrent le plus souvent

41 Robert Aumann, « Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality », Econometrica, 55(1), 1987, pp. 1-18.

aléatoirement. Les probabilités correspondantes sont alors objectives car elles caractérisent la matérialité du jeu. (2) Dans l'étape d'information, les joueurs recueillent la plupart des données par *échantillonnage* dans le temps et sur les autres joueurs. Interviennent alors des probabilités qui ont un statut objectif, et qui s'apparentent à celles que l'on peut trouver en technique statistique. (3) Dans l'étape de calcul, les joueurs sont amenés à faire des prévisions, en résumant certains éléments de la Nature mal connus par des facteurs aléatoires, encore objectifs. Mais quand ils forment des croyances sur les actions futures des autres joueurs, celles-ci sont exprimées par des probabilités subjectives. (4) Enfin, dans l'étape de décision, le joueur joue une certaine action avec une certaine probabilité. Cette probabilité est censée être objective[42]. On peut la voir comme la réalisation du compromis entre exploration et exploitation (voir §1.3)

6.2 Processus d'apprentissage 'agentiel'

Il existe différentes familles de modèles d'apprentissage, qui supposent, chez les joueurs, différentes capacités cognitives et différentes informations [43] . Dans les modèles d'apprentissage par la croyance (*belief-based learning models*), les joueurs retiennent des informations sur les stratégies passées des autres joueurs pour se forger des croyances sur leurs stratégies futures en s'appuyant sur une hypothèse de stationnarité. Dans les modèles d'apprentissage par renforcement (*reinforcement learning models*), les joueurs retiennent des informations sur les performances passées de leurs propres stratégies, et ont tendance à favoriser celles qui se sont avérées performantes.

Le modèle *fictitious play* apparaît comme le modèle le plus simple de la première famille. Chaque joueur observe la séquence des actions passées de l'autre. Il transforme ensuite la *fréquence* (objective) de ses actions passées en une probabilité (subjective) de ses actions futures. Enfin, il sélectionne ou la stratégie qui maximise son espérance d'utilité compte tenu de ses croyances (*strict fictitious play*), ou bien une stratégie qui peut en dévier avec une faible probabilité (*smooth fictitious play*).

Le modèle CPR (*cumulative reinforcement learning*) est le modèle le plus simple de la seconde famille. Chaque joueur n'observe que l'utilité qu'il a obtenue avec chaque action

[42] La possibilité de jouer une action avec une probabilité objective a été introduite très tôt avec une interprétation très différente. L'hypothèse de 'main tremblante' suppose que le joueur a une intention d'action très précise, mais a une probabilité (faible) d'en dévier et d'en mettre en œuvre une autre, voir Reinhardt Selten : A reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in game theory, *International Journal of Game Theory*, 1975, pp.25-55.

[43] Voir Jacques Lesourne, André Orléan & Bernard Walliser (eds.), *Evolutionary Microeconomics*, Springer, 2006, chap 3 et Colin Camerer, *Behavioral Game Theory*, Princeton, Princeton University Press, 2003.

qu'il a mise en œuvre. Il calcule un indicateur de performance pour chaque action, en l'occurrence la somme des utilités qu'il a obtenues toutes les fois qu'il l'a mise en œuvre. Enfin, il applique le modèle de Luce (voir § 1.3) et joue une action avec une probabilité qui croît selon ses performances passées.

6.3 Processus évolutionnaire 'populationnel'

Les processus évolutionnaires sont à l'œuvre au sein d'une population d'agents. Chaque agent est doté d'une stratégie fixée, c'est-à-dire ne possède plus de croyances et ne procède à aucun raisonnement. Toutefois, il est soumis à une fonction de *fitness* qui est assimilée à la fonction d'utilité du jeu. De plus, un processus de sélection ne permet aux agents de survivre et de se reproduire que s'ils obtiennent une fitness suffisante. Enfin, un processus de mutation introduit aléatoirement (selon des probabilités objectives) de nouveaux agents dans la population.

Le modèle du *réplicateur* en est l'illustration la plus simple. Les membres de la population jouent une stratégie (pure) parmi celles d'un jeu symétrique à deux joueurs et la proportion des utilisateurs des différentes stratégies évolue dans le temps. Dans la version *déterministe*, la dynamique est gouvernée par l'équation de réplication qui affirme que la vitesse de variation de la proportion d'utilisateurs d'une stratégie est proportionnelle à la différence entre le paiement moyen obtenu grâce à cette stratégie et le paiement moyen dans la population. Dans la version *stochastique*, la dynamique est de plus soumise à des chocs aléatoires qui peuvent refléter des mutations (Foster et Young, 1990)[44].

[44] Voir l'article fondateur Dean Foster & Peyton Young «Stochastic Evolutionary Game Dynamics », *Theoretical Population Biology*, 38, 1990, pp. 219-232. Pour une présentation récente, voir Wallace, Chris & Young, H. Peyton (2014) «Stochastic Evolutionary Game Dynamics » *in* Young, P. & Zamir, S. (eds.), *The Handbook of Game Theorry*, vol. 4, Elsevier .

7 Conclusions

La théorie des jeux doit d'abord traiter les différentes formes de méconnaissance qu'ont les joueurs. Ils peuvent méconnaître respectivement les états de la Nature, les types des joueurs (traités comme des états de la Nature) et les actions (stratégies) des joueurs (qui résultent des types des joueurs et de leur rationalité). Pour ce faire, elle est fidèle au bayésianisme, dans toutes ses dimensions : (1) elle représente toutes les croyances d'un joueur par une unique distribution de probabilité (subjective) définie sur un espace adéquat ; (2) ces probabilités sont révisées selon la règle de Bayes, par conditionalisation ; (3) elle suppose généralement que les joueurs maximisent l'espérance d'utilité induite par leurs probabilités et leur utilité.

Ces hypothèses simples facilitent grandement le calcul des équilibres entre les joueurs. Pourtant, elles peuvent être contestées sur des bases théoriques autant qu'empiriques, même si peu de travaux s'en départissent à ce jour : (1) les probabilités assignées aux facteurs incertains ne sont pas dénués d'ambiguïté et obligent à recourir à des outils plus puissants (capacités de Choquet), mais moins maniables ; (2) la règle de Bayes, dûment justifiée pour des probabilités objectives (dont les probabilités subjectives sont parfois inférées), doit être spécifiquement justifiée d'une autre façon pour des probabilités subjectives a priori ; (3) le critère de choix usuel est fondé axiomatiquement dans un contexte de décision individuelle, mais les axiomes mobilisés ne sont guère réalistes dans un contexte de jeu.

L'usage de probabilités subjectives est particulièrement prégnant dans la théorie des jeux épistémique où le calcul de l'équilibre est réalisé *ex ante* dans la tête des joueurs à partir de croyances initiales. A contrario, la théorie des jeux évolutionnaire mobilise surtout des probabilités objectives car l'équilibre est calculé séquentiellement par le modélisateur qui considère les joueurs comme de simples automates qui agissent indépendamment. La théorie des jeux classique est dans une position intermédiaire et combine des probabilités subjectives correspondant à des croyances élémentaires des joueurs et des probabilités objectives connues du modélisateur (et éventuellement endossées par les joueurs).

Cependant, la théorie des jeux considère aussi une nouvelle forme de probabilités qui n'est pas liée à l'environnement perçu d'un joueur. Il s'agit de probabilités qu'un joueur introduit volontairement pour rendre son propre comportement plus imprévisible pour les autres joueurs. Ces probabilités sont objectives pour le joueur qui les met en œuvre et sont d'ailleurs supposées définies par un véritable dispositif aléatoire. Elles ne sont pas révisées, mais interviennent dans la décision du joueur à travers le critère usuel de maximisation de l'espérance d'utilité. Quant aux autres joueurs, ils sont amenés à considérer qu'il s'agit d'une forme supplémentaire de méconnaissance traitée sous une forme subjective.